数理解析研究所講究録
936巻 1996年 70-79

コンパクト量子群について

福岡大学理学部　黒瀬　秀樹　(　Hideki Kurose　)

§1 序

最近数年の間にコンパクト量子群のほぼ同等な定義が C^*–代数、Hopf $*$–代数のレベルで与えられた。構造に関することも含めて、大まかな議論は完結したように思われる。ここでは Hopf $*$–代数レベルでのコンパクト量子群の定義からスタートし、その構造を議論することを目的とする。

定義 $\mathcal{A}=(\mathcal{A},\delta,\varepsilon,\kappa)$ が Hopf $*$-algebra であるとは、

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{A}: & \text{a unital } *\text{-algebra} \\
\delta: & \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \text{ (coproduct) a } *\text{-homomorphism} \\
 & \qquad \text{s.t. } (id\otimes\delta)\circ\delta=(\delta\otimes id)\circ\delta \\
\varepsilon: & \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ (counit) a } *\text{-homomorphism} \\
 & \qquad \text{s.t. } (id\otimes\varepsilon)\circ\delta=(\varepsilon\otimes id)\circ\delta=id \\
\kappa: & \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \text{ (antipode) an anti-homomorphism} \\
 & \qquad \text{s.t. } m\circ(id\otimes\kappa)\circ\delta=m\circ(\kappa\otimes id)\circ\delta=u\circ\varepsilon \\
 & \qquad\quad \kappa\circ *\circ\kappa\circ *=id
\end{array}
$$

であるときをいう。ただし、$\otimes$ は代数的テンソル積、

$$
\begin{array}{l}
m \text{ は } \mathcal{A} \text{ の product } (m:\ \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\ni a\otimes b\to ab\in\mathcal{A}) \\
u \text{ は } \mathcal{A} \text{ の unit } (u:\ \mathbb{C}\ni\lambda\to\lambda 1\in\mathcal{A})
\end{array}
$$

である。

量子群という言葉は広い意味では、包絡 Lie 環の変形または群上の関数環の変形という2とおりの意味で用いられるが、ここでは我々は後者の意味で用いることにする。

例　G を有限群、$F(G)$ を G 上の $\mathbb{C}$ 値関数全体とすれば、$F(G)$ は pointwise な積と $f^* = \bar{f}$ により unital $*$-algebra。さらに

$$\delta(f)(s,t) = f(st)$$
$$\varepsilon(f) = f(e)$$
$$\kappa(f)(s) = f(s^{-1})$$

$(f \in F(G),\ e$ は G の unit, $\ s,t \in G)$ と定義すれば、$F(G \times G) \cong F(G) \otimes F(G)$ より、$(F(G), \delta, \varepsilon, \kappa)$ は Hopf $*$-algebra。

例　G がコンパクト群のとき、G の有限次元表現の座標関数から生成される $C(G)$ の部分空間を $\mathcal{A}$ とすれば、上の例のように定義される $\delta, \varepsilon, \kappa$ で $(\mathcal{A}, \delta, \varepsilon, \kappa)$ は Hopf $*$–代数となる。

ここで議論する Hopf $*$–代数は、上の例における群 G に付随した Hopf $*$–代数を何らかの意味での変形することにより得られたもの、と理解しておく。扱う Hopf $*$–代数は一般には可換でもないし $(m \circ \sigma \neq m)$、余可換でもない $(\sigma \circ \delta \neq \delta)$。$(\sigma:\ \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \ni a \otimes b \rightarrow b \otimes a \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A})$ Hopf $*$–代数 $\mathcal{A}$ に対して、あたかも群らしきものが下にあり、$\mathcal{A}$ はその上の関数環の部分環であるようなイメージを持って議論をすすめることにする。

定義　$\mathcal{A}'$ を Hopf $(*)$–代数 $\mathcal{A}$ の algebraic dual とする。$\varphi \in \mathcal{A}'$ が left (right) invariant であるとは、φ が

$$(id \otimes \varphi)(\delta(a)) = \varphi(a)1 \quad ((\varphi \otimes id)(\delta(a)) = \varphi(a)1) \text{ for } a \in \mathcal{A}$$

を満たすときをいう。

これに関しては次のことが判っている。

事実 1) Hopf $*$–代数 $\mathcal{A}$ 上の non-trivial な left (or right) invariant functional はあれば定数倍を除いて unique (c.f. [0])、またある意味で faithfull (c.f. [7])。

2) Hopf $*$–代数 $\mathcal{A}$ 上の non-trivial, left inv. $\varphi \in \mathcal{A}'$ が positive ($\varphi(a^*a) \geq 0,\ a \in \mathcal{A}$) ならば、

$$\varphi \text{ は right inv. でもある、} \varphi(1) \neq 0$$
$$\varphi \text{ は faithfull } (\varphi(a^*a) = 0 \Rightarrow a = 0)$$

問題 Hopf $*$–代数 $\mathcal{A}$ 上の両側 inv. $\varphi \in \mathcal{A}'$ は自動的に positive か？

定義 Hopf $*$–代数 $\mathcal{A}$ が、

$$\text{non-trivial, positive, (両側) invariant } h \in \mathcal{A}'$$

をもつとき、$\mathcal{A}$ を compact, h を $\mathcal{A}$ 上の Haar measure という。以下 $\mathcal{A}$ 上の Haar measure h に対して $h(1) = 1$ を仮定する。

上に定義したコンパクト Hopf $*$–代数がタイトルにあるコンパクト量子群の意味するものである。

コンパクト Hopf $*$–代数の議論に入る前に、 Hopf $*$–代数 $\mathcal{A}$ に対して

$$\mathcal{A}' \text{ の代数と } \mathcal{A} \text{ の表現}$$

について述べておこう。

Hopf $*$–代数 $\mathcal{A}$ の dual $\mathcal{A}'$ には自然に積が定義できる

$$\varphi * \psi \equiv (\varphi \otimes \psi) \circ \delta \quad (\varphi, \psi \in \mathcal{A}')$$

この積を convolution という。$\mathcal{A}'$ はこの積の下で unital algebra となる。(counit ε が $\mathcal{A}'$ の単位元)

$\mathcal{A}$ が Hopf $*$–代数ならば、$\mathcal{A}'$ にはさらに 2 種類の involution が定義できる。

$$\varphi^\sharp = \varphi^* \circ \kappa, \quad \varphi^\flat = \varphi^* \circ \kappa^{-1} \quad (\varphi \in \mathcal{A}')$$

ただし $\varphi^*(a) \equiv \overline{\varphi(a^*)}$ $(a \in \mathcal{A})$ である。この 2 種類の involution の下で $\mathcal{A}'$ は $*$-algebra となる。$\sharp, \flat$ をそれぞれ left, right involution と呼ぶことにする。

(注) $\varphi^\sharp = \varphi^\flat \quad (\varphi \in \mathcal{A}') \Leftrightarrow \kappa$ は $*$-invariant $\Leftrightarrow \kappa^2 = id$

φ^* は involution ではない。 $((\varphi * \psi)^* = \varphi^* * \psi^*)$

Hopf $*$–代数 $\mathcal{A}$ に対して、あたかも下に群らしきものがあるとのイメージを持ったとき、群のユニタリー表現に相当するものが次で定義される。

定義 Hopf $*$–代数 $\mathcal{A}$ に対して、$\{u_{ij}\}_{i,j=1,\cdots,n} \subset \mathcal{A}$ が $\mathcal{A}$ の (n-dim.) unitary corepresentation であるとは、

$$\delta(u_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} \otimes u_{kj}$$
$$\sum_{k=1}^{n} u_{ik} u_{jk}^* = \sum_{k=1}^{n} u_{ki}^* u_{kj} = \delta_{ij} 1$$

が成立するときをいう。$U \equiv (u_{ij}) \in M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{A}$ も $\mathcal{A}$ の unitary corep. という。

(注) $\mathcal{A}$ の unitary corep. $U = (u_{ij})$ に対して、antipode κ の axiom より $\kappa(u_{ij}) = u_{ji}^*$ を得る。

unitary corep. $\{u_{ij}\} \subset \mathcal{A}$ または対応する $U = (u_{ij}) \in M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{A}$ が既約であるとは

$$\{T \in M_n(\mathbb{C}) | (T \otimes id)U = U(T \otimes id)\} = \mathbb{C}1$$

であるときをいう。

§2. コンパクト Hopf $*$–代数に対する convolution algebra

以下、$\mathcal{A}=(\mathcal{A},\delta,\varepsilon,\kappa)$ を Hopf $*$–代数、h を $\mathcal{A}$ 上の Haar measure とする。$\mathcal{A}$ に内積

$$(a,b)=h(b^*a) \quad \text{for } a,b\in\mathcal{A}$$

を考え、$\mathcal{A}$ の $(\cdot,\cdot)$ による完備化を $\mathcal{H}_h$ とかくことにする。

$\mathcal{A}$ 及び $\mathcal{A}'$ の algebra としての表現が次のように定義される。

$$\begin{array}{ll} \pi(a)b=ab & a,b\in\mathcal{A} \\ \lambda(\varphi)=(id\otimes\varphi)\circ\delta & \varphi\in\mathcal{A}' \\ \varrho(\varphi)=(\varphi\otimes id)\circ\varphi\in\mathcal{A}' & \end{array}$$

このとき $\pi(a),\lambda(\varphi),\varrho(\varphi)$ $(a\in\mathcal{A},\ \varphi\in\mathcal{A}')$ は $\mathcal{H}_h$ で dense な $\mathcal{A}$ を定義域に持ち、$\mathcal{A}$ を不変にする閉作用素である。

可

$$\pi(a^*)\subset\pi(a)^*,\quad \lambda(\varphi^\sharp)\subset\lambda(\varphi)^*,\quad \varrho(\varphi^\flat)\subset\varrho(\varphi)^*$$

(注) 結果的には各 $\pi(a)$ $(a\in\mathcal{A})$ は $\mathcal{H}_h$ 上の有界作用素に拡大できるがこれは trivial なことではない。

また

$$\begin{aligned} \pi(ab)&=\pi(a)\pi(b) \\ \lambda(\varphi*\psi)&=\lambda(\varphi)\lambda(\psi) \\ \varrho(\varphi*\psi)&=\varrho(\psi)\varrho(\varphi) \end{aligned}$$

$(a,b\in\mathcal{A},\ \varphi,\psi\in\mathcal{A}')$ が定義より明らかに成立する。

さて $\xi\in\mathcal{H}_h$ に対して

$$\varphi_\xi(a)=(\xi,a^*) \quad a\in\mathcal{A}$$

で $\varphi_\xi\in\mathcal{A}'$ を定義すると、$\varphi\in\mathcal{A}'$ に対して

$$\begin{aligned} \varphi=\varphi_\xi \quad & \text{for some } \xi\in\mathcal{H} \\ \Rightarrow\ & \varphi \text{ は } L^2\text{-bounded i.e.} \\ & |\varphi(a^*)|\le\lambda\|a\| \quad (a\in\mathcal{A}) \text{ for some const. } \lambda \end{aligned}$$

L^2-bounded φ_ξ, $\varphi_\eta \in \mathcal{A}'$ に対して

$$\varphi_\xi * \varphi_\eta \text{ はまた } L^2\text{-bounded},$$

従って

$$\varphi_\xi * \varphi_\eta = \varphi_\zeta \text{ for some } \zeta \in \mathcal{H}_h$$

この ζ を $\xi * \eta$ とかくことにする。

事実 1) $\mathcal{H}_h$ は積 $*$ と Hilbert space norm の下で Banach 環

2) $\mathcal{A}$ は $\mathcal{H}_h$ の両側イデアル、特に $\mathcal{A} * \mathcal{A} \subset \mathcal{A}$

3) $a \in \mathcal{A}$ に対して $a^\sharp = \kappa(a)^*$, $a^\flat = \kappa(a^*)$ と定義すると

$$\varphi_a^\sharp = \varphi_{a^\sharp}, \quad \varphi_a^\flat = \varphi_{a^\flat},$$

特に $a \to a^\sharp$, $a \to a^\flat$ はそれぞれ $*$ を積とする algebra $\mathcal{A}$ の involution となる。

$*$ を積とし、$\sharp$(または $\flat$) を involution とする $*$-algebra $\mathcal{A}$ を Hopf $*$-algebra $\mathcal{A}$ と区別するため、$\tilde{\mathcal{A}}$ とかき、これを left (または right) convolution algebra ということにする。同一視 $a \in \mathcal{A} \leftrightarrow \varphi_a \in \mathcal{A}'$ により left (right) convolution algebra $\tilde{\mathcal{A}}$ は left (right) involution を持つ dual $*$-algebra $\mathcal{A}'$ の subalgebra と考えることができる。

事実 1) $\varepsilon(b^\sharp * a) = (a, b) = \varepsilon(a * b^\flat)$ $(a, b \in \tilde{\mathcal{A}})$ が成立

(ε は $\tilde{\mathcal{A}}$ 上の Plancharel weight)

2) $\tilde{\mathcal{A}}^2$ は $\tilde{\mathcal{A}}$ で dense。従って left (right) convolution algebra $\tilde{\mathcal{A}}$ は $\mathcal{H}_h$ の内積に関して left (right) Hilbert algebra である。

3) $\hat{\pi}(\xi)\eta = \xi * \eta = \hat{\pi}'(\eta)\xi$ と定義すると $\hat{\pi}(\tilde{\mathcal{A}})'' = \hat{\pi}'(\tilde{\mathcal{A}})''$.

(注) anti-linear operator $a \to a^\sharp$ $(a \to a^\flat)$ in $\mathcal{H}_h$ の閉包を $S(F)$ とかけば、定義域 $\mathcal{D}(S)$ $(\mathcal{D}(F))$ は achieved left (right) Hilbert algebra となる。また $S = F^*$, $F^* = S$ が成立。

コンパクト Hopf $*$–代数に対する convolution algebra $\tilde{\mathcal{A}}$ の（簡単に判るが）顕著な性質は

$$\hat{\pi}(a),\ \hat{\pi}'(a) \quad (a \in \mathcal{A}) \text{ が finite rank operators となる}$$

ことである。これより次の定理が示せる。

定理 Banach algebra $\mathcal{H}_h$ の minimal closed two sided ideal からなる族 $\{A_\gamma :\ \gamma \in \Gamma\}$ が存在して

$$\mathcal{H}_h = \sum_{\gamma\in\Gamma}^{\oplus} A_\gamma, \quad A_\gamma \cong \mathcal{M}(n_\gamma, \mathbb{C})$$
$$\tilde{\mathcal{A}} = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \qquad \text{(algebraic direct sum)}$$

さて 各 $A_\gamma \cong M(n_\gamma, \mathbb{C})$ 上の trace τ_γ に対して、

$$\varepsilon(a) = \tau_\gamma(h_\gamma * a) \quad a \in A_\gamma$$

を満たす $h_\gamma = h_\gamma^\sharp \in A_\gamma$、さらに h_γ を対角化する matrix unit $\{u_{ij}\}$

$$e^\gamma_{ij} * e^\gamma_{k\ell} = \delta_{jk} e^\gamma_{i\ell}, \quad e^{\gamma\sharp}_{ij} = e^\gamma_{ji}, \quad h_\gamma = \sum_{i=1}^{n_\gamma} \lambda_i e^\gamma_{ii}$$

がとれる。

$$u^\gamma_{ij} = h_\gamma^{-\frac{1}{2}} * e^\gamma_{ij} * h_\gamma^{-\frac{1}{2}} \quad (i, j = 1, \cdots, n_\gamma)$$
$$U^\gamma = (u^\gamma_{ij}) \in M(n_\gamma, \mathbb{C}) \otimes \mathcal{A}$$

とおけば U^γ は $\mathcal{A}$ の既約 unitary corepresentation となる。従って Peter-Weyl の定理に相当する次の定理が成立。

定理 Hopf $*$–代数 $\mathcal{A}$ に対して次は同値

(i) $\mathcal{A}$ はコンパクト

(ii) 有限次元既約な $\mathcal{A}$ の unitary corep. の族 $U^\gamma = (u^\gamma_{ij})$ $(\gamma \in \Gamma)$ が存在して

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} \text{Span } \{u^\gamma_{ij}\}_{i,j}$$

(注) Dijkhuizen-Koornwinder [1] は余代数の基本定理を用いて上の事実を示している。

§3. Remarks

1. コンパクト Hopf $*$–代数 $\mathcal{A} = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} \text{Span}\{u^\gamma_{ij}\}_{i,j}$ に対して、

$$\begin{aligned} \|\pi(u^\gamma_{ij})b\|^2 &= h(b^* u^{\gamma *}_{ij} u^\gamma_{ij} b) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n_\alpha} h(b^* u^{\gamma *}_{kj} u^\gamma_{kj} b) = \|b\|^2. \end{aligned}$$

任意の $a \in \mathcal{A}$ は $\{u^\gamma_{ij}\}$ の一次結合で書けるから、$\pi(a) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_h)$。

$\pi(\mathcal{A})$ を作用素ノルムにより完備化して得られる C^*–代数を $\overline{\pi(\mathcal{A})}$ と書く。このとき $\mathcal{A}$ の coproduct δ は連続に

$$\Phi : \overline{\pi(\mathcal{A})} \to \overline{\pi(\mathcal{A})} \otimes \overline{\pi(\mathcal{A})}$$

に拡張でき、Φ は C^*–代数 $\overline{\pi(\mathcal{A})}$ の coproduct となる。さらに

$(\overline{\pi(\mathcal{A})} \otimes 1)\Phi(\overline{\pi(\mathcal{A})})$, $(1 \otimes \overline{\pi(\mathcal{A})})\Phi(\overline{\pi(\mathcal{A})})$ は $\overline{\pi(\mathcal{A})} \otimes \overline{\pi(\mathcal{A})}$ で dense。従って $(\overline{\pi(\mathcal{A})}, \Phi)$ は Woronowicz の意味でのコンパクト量子群となる。

逆に Woronowicz の意味でのコンパクト量子群があれば、その dense な subalgebra でコンパクト Hopf $*$–代数となるものがとれる。c.f. [6]

2. $\tilde{\mathcal{A}}$ を left convolution algebra for compact Hopf $*$-algebra $\mathcal{A}$ とする。$\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}'$ と考え、$\mathcal{A}$ と $\tilde{\mathcal{A}}$ の pairing を $<\cdot,\cdot>$ とかく。$a \in \tilde{\mathcal{A}}$ に対して

$$< x \otimes y,\ \hat{\delta}(a) >=< xy, a > \quad x, y \in \mathcal{A}$$

で $\hat{\delta}(a)$ を定義すると、

$$\hat{\delta}:\ \tilde{\mathcal{A}} \to M(\tilde{\mathcal{A}} \otimes \tilde{\mathcal{A}})$$

は $*$-homomorphism で、$\tilde{\mathcal{A}}$ の coproduct を与える。ただし $M(\cdot)$ は multiplier algebra を表わし、$\tilde{\mathcal{A}} = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} M(n_\gamma, \mathbb{C})$ より

$$M(\tilde{\mathcal{A}} \otimes \tilde{\mathcal{A}}) = \Pi_{\alpha,\beta\in\Gamma} M(n_\alpha, \mathbb{C}) \otimes M(n_\beta, \mathbb{C}).$$

さらに

$$\begin{aligned} a \otimes b &\longrightarrow \hat{\delta}(a)(1 \otimes b) \\ a \otimes b &\longrightarrow (a \otimes 1)\hat{\delta}(b) \end{aligned}$$

は $\tilde{\mathcal{A}} \otimes \tilde{\mathcal{A}}$ 上の bijection となる。従って $(\tilde{\mathcal{A}}, \hat{\delta})$ は multiplier Hopf $*$-algebra となり、Van Daele [8] の意味で discreat quantum group. ([2] も参照) 実は、逆に multiplier Hopf $*$-algebra としての discreat quantum group から compact quantum group (compact Hopf $*$-algebra) を構成することもでき、両者の間の双対性が成立。極最近、discreat, compact quantum group を特別な場合として含む multiplier Hopf $*$-algebra のクラスの中で group dual に相当する双対性が成立することが Van Daele により示された。

文献

[0] Abe, ホップ代数, 岩波書店

[1] Dijkhuizen-Koornwinder, CQG algebras : A direct algebraic approach to compact quantum groups, Letters. Math. Phys. 32, 315-330 (1994).

[2] Effros-Ruan, Discrete quantum groups, I., preprint (1993), to appear in Internat. J. Math.

[3] Koornwinder, General compact quantum groups, a tutorial, preprint (1994).

[4] K-Nakagami, Compact Hopf *-algebras, quantum enveloping algebras and dual Woronowicz algebras, in preparation.

[5] Masuda-Nakagami, A von Neumann algebra flamework for the duality of the quantum groups, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 30, 799-850 (1994) .

[6] Woronowicz, Compact quantum groups, preprint (1992).

[7] Van Daele, Private communications.

[8] ———, Discreat quantum groups, preprint (1993).

[9] Yamagami, On unitary representations of compact quantum groups, preprint (1993).